THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 5

Exercise 1. À faire vous-même.

Exercise 2. (1) Tout élément d'un groupe fini est de torsion, donc $\mathrm{Tors}(A) = A$.

(2) Aucun élément sauf 0 n'est d'ordre fini, donc son groupe de torsion est trivial.

(3) Soit $[q] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un élément quelconque représenté par $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Alors
$$b[q] = [bq] = [a] = [0] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
puisque $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi, tout élément est de torsion et $\mathrm{Tors}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(4) Soit $x \in \mathbb{C}^\times$ et écrivons-le en forme polaire $x = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. Alors $x^n = r^n e^{in\theta} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $n\theta = 0 \bmod 2\pi$, c'est-à-dire $x = e^{2\pi ik/n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ce sont les racines n-ièmes de l'unité μ_n. Ainsi
$$\mathrm{Tors}(\mathbb{C}^\times) = \mu_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mu_n.$$

(5) Nous savons que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, qui sont libres, donc sans torsion.

(6) Nous avons vu dans le cours que les sous-groupes d'un groupe abélien libre fini sont abéliens libres, ce qui montre que leur sous-groupe de torsion est trivial.

Exercise 3. Étant donné que G est de type fini, il existe un ensemble fini de générateurs pour G. Soit $g_1, g_2, \ldots, g_k$ un ensemble de générateurs pour G, de sorte que tout élément de G peut s'écrire comme une combinaison linéaire entière de ces générateurs :
$$g = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k,$$
où $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$.

Puisque $\mathrm{Tors}(G) = G$, tout élément de G est un élément de torsion. Cela implique que pour chaque générateur $g_i \in G$, il existe un entier positif m_i minimal tel que $m_i \cdot g_i = 0$ (m_i est l'ordre de g_i).

Puisque G est engendré par l'ensemble fini $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ et que chaque g_i a un ordre fini m_i, il n'y a qu'un nombre fini de combinaisons possibles des générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_k$ avec des coefficients entiers n_i modulo m_i, ce qui implique que G lui-même est fini.

Exercise 4. **(1) $\Longrightarrow$ (2)** : Pour tout $i \in I$, définissons $e_i \in \mathbb{Z}^{\oplus I}$ comme :
$$e_i := (a_j)_{j \in I} \in \mathbb{Z}^{\oplus I}, \text{ où } a_j = 1 \text{ si } j = i \text{ et } a_j = 0 \text{ si } j \neq i.$$
Il est facile de montrer en utilisant la définition des sommes directes que l'ensemble $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{Z}^{\oplus I}$. Maintenant, si $A \cong \mathbb{Z}^{\oplus I}$, alors l'image homomorphe des e_i est une base pour

A.

(2) $\implies$ **(1)** : Fixons une base $(a_k)_{k\in I}$ de A, alors tout élément $x \in A$ peut être écrit de manière unique comme

$$x = \sum_{k\in I} n_k a_k$$

pour certains $n_k \in \mathbb{Z}$. Considérons la fonction suivante, qui est bien définie en raison de l'unicité mentionnée ci-dessus

$$\varphi : A \to \mathbb{Z}^{\oplus I}, \sum_{k\in I} n_k a_k \mapsto (n_k)_{k\in I}.$$

Il est facile de vérifier que φ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Exercise 5. Nous observons que si f se prolonge à un homomorphisme de groupe, il doit être défini par la formule suivante:

$$(a, b, c) \mapsto af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3).$$

Cela nous dit qu'il existe un unique homomorphisme de groupes $\varphi : F \to \mathbb{Z}^2$ qui prolonge f. L'image d'un homomorphisme de groupes est toujours un sous-groupe du codomaine. Puisque nous avons vu dans les cours que les sous-groupes des groupes abéliens libres finis sont libres abéliens finis, cela répond positivement à la question.

Exercise 6. Nous utiliserons constamment le fait que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^k$ est libre de rang $l \leq k$. Dans chaque cas, nous désignerons le groupe abélien en question par A.

(1) Comme $\{(1, 1)\}$ est un ensemble générateur de A et est linéairement indépendant, c'est une base pour A et donc le rang de A est 1.
(2) Le rang de A est encore 1 puisque $B = \{(1, 2)\}$ est une base pour A. L'ensemble B est linéairement indépendant et génère A car $(-3, -6) = (-3) \cdot (1, 2)$.
(3) On vérifie que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ forme une base pour A et donc le rang de A est 3.
(4) Le rang de A est 3 puisque les trois éléments génèrent A et sont linéairement indépendants, ce qui peut être constaté en observant que le déterminant de la matrice suivante est non nul
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \\ 1 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$
(5) Remarquez que l'ensemble $B = \{(1, 5, 1), (2, 3, 8)\}$ est linéairement indépendant et génère A puisque $(1, -9, 13) = (-3) \cdot (1, 5, 1) + 2 \cdot (2, 3, 8)$. Donc, le rang de A est 2.

Exercise 7. La même preuve que dans la Proposition 11 des notes de cours s'applique pour montrer que $\mathbb{Q}^{>0}$ n'est pas de type fini. Pour montrer qu'il est libre, nous montrons que l'ensemble $B = \{p_i \mid p_i \text{ est un nombre premier}\}$ des nombres premiers forme une base. Soit $q = \frac{a}{b}$ écrit sous forme irréductible, avec $a, b \in \mathbb{N}_*$. Décomposons a et b comme un produit de puissances de nombres premiers. Remarquons que les nombres premiers apparaissant dans chaque décomposition sont distincts puisque la fraction $\frac{a}{b}$ a été choisie irréductible. En utilisant ces décompositions, nous obtenons q comme un produit fini de puissances d'éléments de B (les puissances sont négatives pour les premiers apparaissant dans la décomposition de b). S'il existait plus d'une décomposition de q comme un produit de puissances de nombres premiers, cela donnerait des décompositions distinctes de a ou de b (ou des deux) comme produit de puissances de nombres premiers, en séparant les puissances positives et négatives. Par unicité de la décomposition des nombres naturels (vue en algèbre linéaire 2), nous obtenons une contradiction.

Nous avons montré que B est une base du groupe abélien $\mathbb{Q}^{>0}$, ce qui signifie qu'il est libre par l'exercice 4.

Exercise 8. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

La suite induite des sous-groupes de torsion est

$$0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

qui n'est clairement pas exacte en raison de l'échec de la surjectivité de l'application $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.